Examen HAVO

2017

tijdvak 2
woensdag 21 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

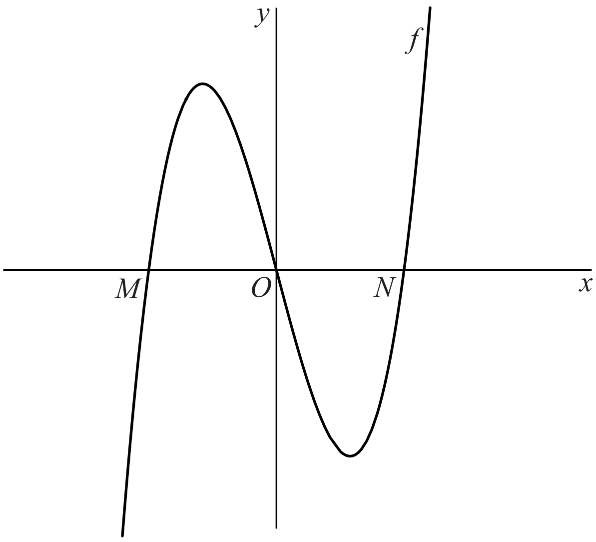
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Afstand tussen twee raaklijnen

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$. De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in M, de oorsprong $O(0, 0)$ en N. Zie figuur 1.

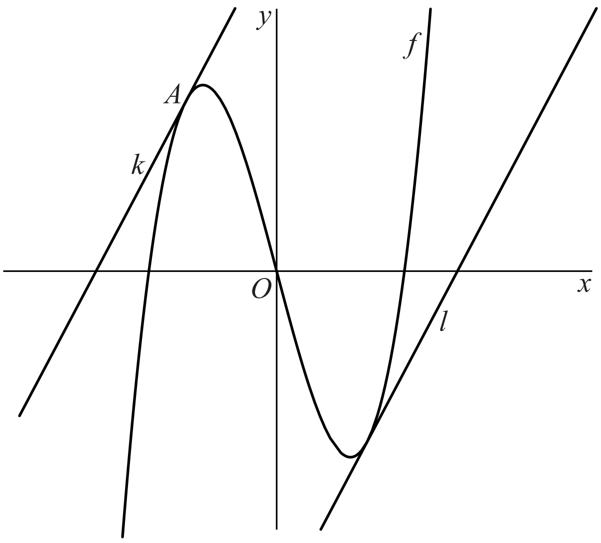
figuur 1



3p **1** Bereken exact de afstand tussen M en N.

De lijnen k en l zijn evenwijdige raaklijnen aan de grafiek van f.
Lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(-2, 4)$. Zie figuur 2.

figuur 2



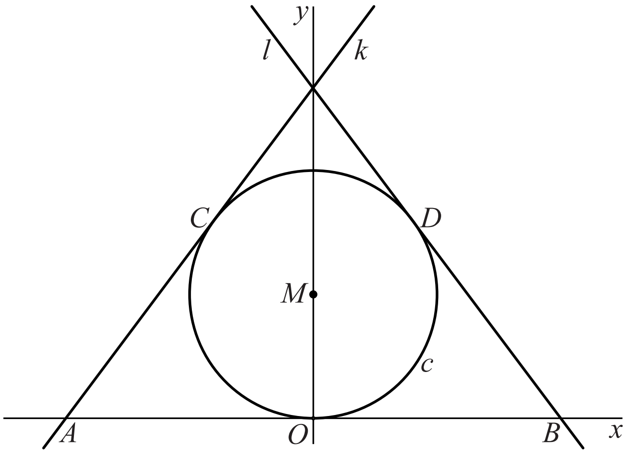
De afstand van O tot k is de helft van de afstand tussen k en l.

7p **2** Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Over een cirkel gespannen

De cirkel c met middelpunt $M(0,5)$ is gegeven door $x^2+(y-5)^2=25$.
De punten $C(-4,8)$ en $D(4,8)$ liggen op de cirkel. De lijn k is de raaklijn aan c in punt C en de lijn l is de raaklijn aan c in punt D. Punt A is het snijpunt van k met de x-as en punt B is het snijpunt van l met de x-as.
Zie figuur 1.

figuur 1

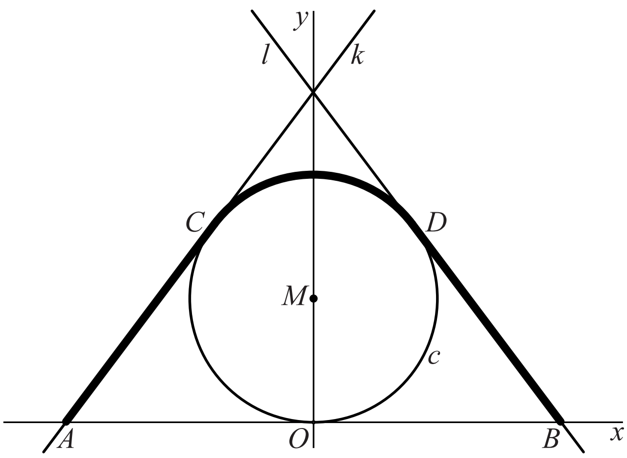


De coördinaten van punt B zijn $(10,0)$.

4p **3** Bewijs dit.

Tussen A en B wordt denkbeeldig een touwtje gespannen dat over de cirkel heen gaat. Het touwtje is zo gespannen dat het tussen C en D precies over de cirkel ligt.
Het touwtje is recht tussen A en C en tussen D en B. Zie figuur 2.

figuur 2



5p **4** Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van het touwtje.

Zonnepanelen

De prijs van elektrische energie – gewoonlijk **elektriciteit** genoemd – stijgt niet elk jaar met hetzelfde percentage.
In de tabel staan de groeipercentages ten opzichte van het voorafgaande jaar voor de periode van 1997 tot en met 2006.

tabel

jaar	prijsstijging ten opzichte van het voorafgaande jaar in gehele procenten
1996	
1997	2
1998	1
1999	7
2000	14
2001	26
2002	3
2003	3
2004	5
2005	8
2006	6

Uit de gegevens in de tabel volgt dat de prijs van elektriciteit in 10 jaar tijd ongeveer is verdubbeld.

3p **5** Toon dit aan.

Een verdubbeling in 10 jaar kan ook bereikt worden door de prijs van elektriciteit jaarlijks met een vast percentage te laten stijgen.

4p **6** Bereken op algebraïsche wijze dit percentage. Rond je eindantwoord af op één decimaal.

Met zonnepanelen kan worden bespaard op de elektriciteitskosten.
Hoeveel er met zonnepanelen kan worden bespaard, hangt in deze opgave alleen af van de prijsstijging van elektriciteit en van de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen.

Zonder rekening te houden met de kosten van aankoop en installatie kan de totale besparing vanaf het moment van installatie worden berekend met behulp van de volgende formule:

$$B = \frac{19{,}9V}{P} \cdot \left(\left(1 + \frac{P}{100} \right)^t - 1 \right)$$

Hierin is B de totale besparing in euro's, V de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen in kWh per jaar, P het percentage waarmee de elektriciteitsprijs jaarlijks stijgt en t het aantal jaren na 2006.

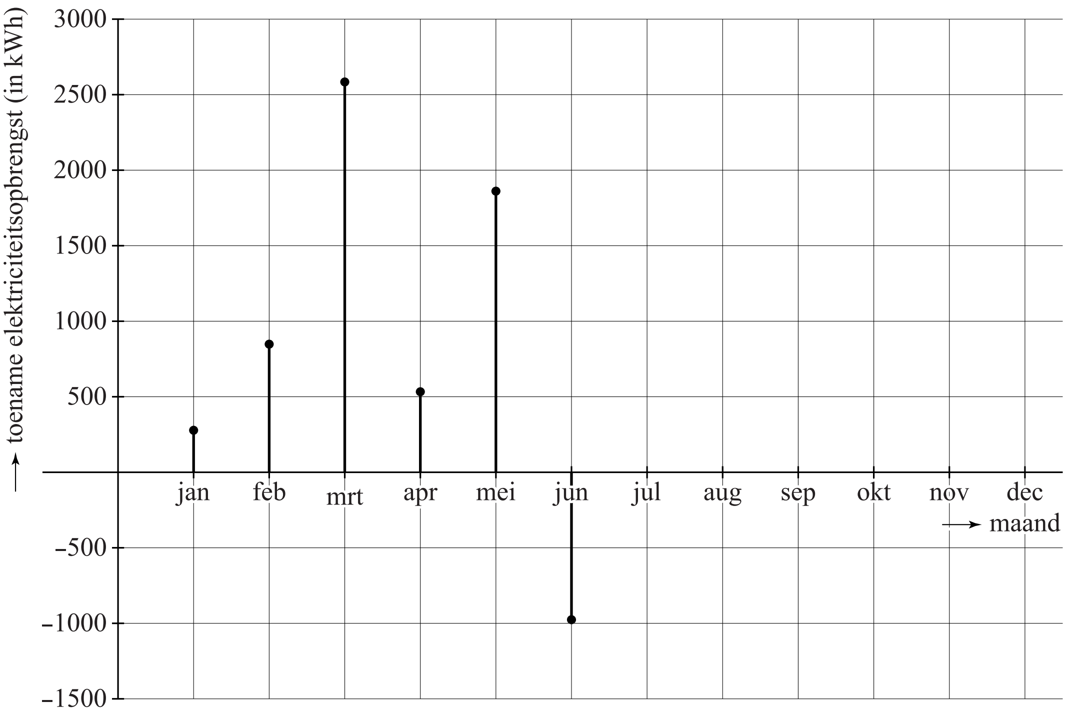
In januari 2006 worden zonnepanelen geplaatst.
De kosten voor de aankoop en installatie hiervan zijn € 13 000,-.
De zonnepanelen leveren 2250 kWh per jaar.
We nemen aan dat de elektriciteitsprijs jaarlijks steeds met 7% stijgt.
Na een aantal jaren zal de totale besparing groter zijn dan de aanschafprijs van de zonnepanelen.

3p **7** Bereken na welk geheel aantal jaren dit voor het eerst het geval is.

Een school heeft een grote hoeveelheid zonnepanelen op het dak staan. In het jaar 2011 was de elektriciteitsopbrengst van deze zonnepanelen in totaal 45 000 kWh, waarvan 520 kWh in de maand december.

In het toenamediagram in de figuur zijn de gegevens van het eerste halfjaar van 2012 verwerkt.

figuur



Uiteindelijk bleek dat in het jaar 2012 5000 kWh minder elektriciteit werd geproduceerd dan in 2011.

3p **8** Bereken hoeveel elektriciteit er in het tweede halfjaar van 2012 is geproduceerd. Geef je eindantwoord in honderden kWh nauwkeurig.

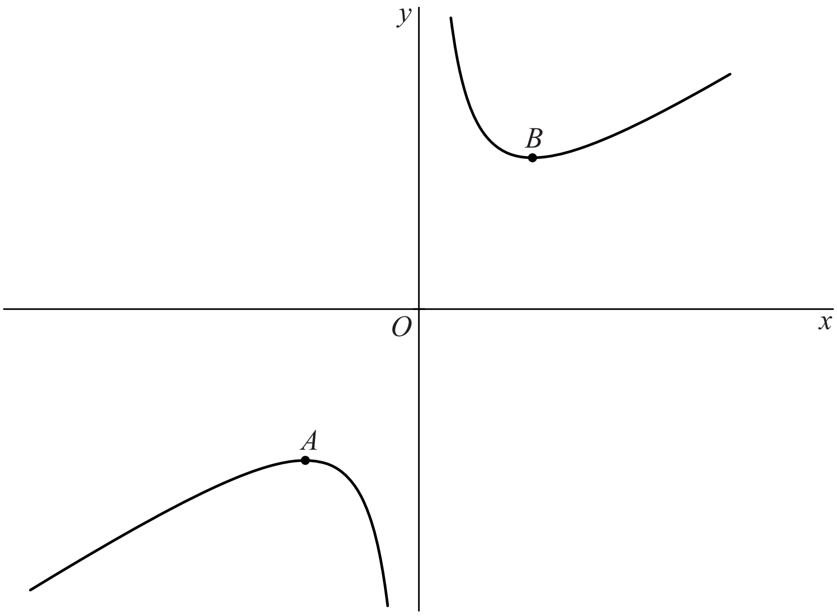
De toppen van de grafiek van een gebroken functie

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x}$$

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



5p **9** Bereken exact de coördinaten van A en B.

Sinus en wortel

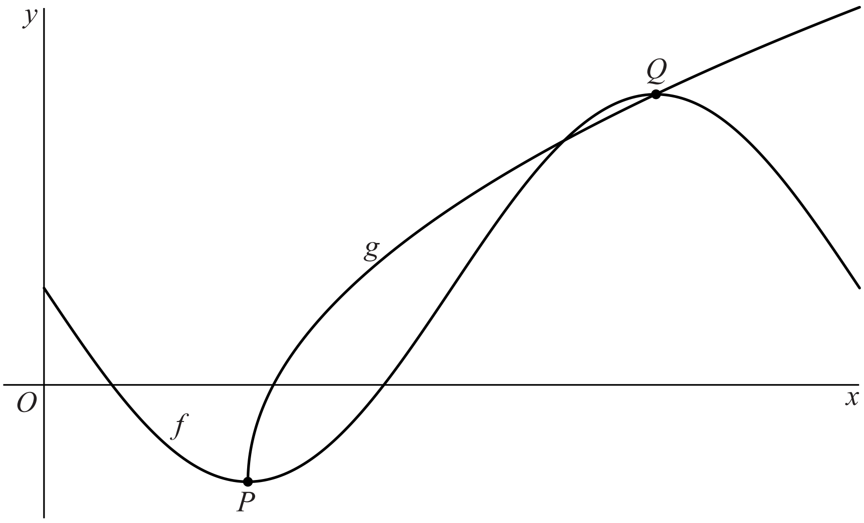
Op het domein $[0,2]$ is de functie f gegeven door:

$$f(x) = 1 - 2\sin(\pi x)$$

4p **10** Bereken exact de nulpunten van f.

Verder is gegeven de functie g door $g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8}$.
Zie de figuur.

figuur



De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f.

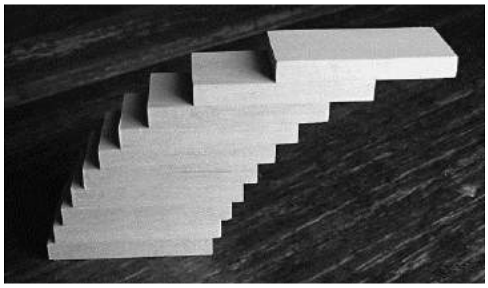
4p **11** Bewijs dat P en Q op de grafiek van g liggen.

5p **12** Bereken exact de helling van de grafiek van g in het snijpunt van de grafiek van g met de x-as.

Tegels stapelen

Door gelijke rechthoekige tegels ‘netjes’ op elkaar te stapelen kan een toren gebouwd worden die naar één kant overhelt. Zie de foto.

foto



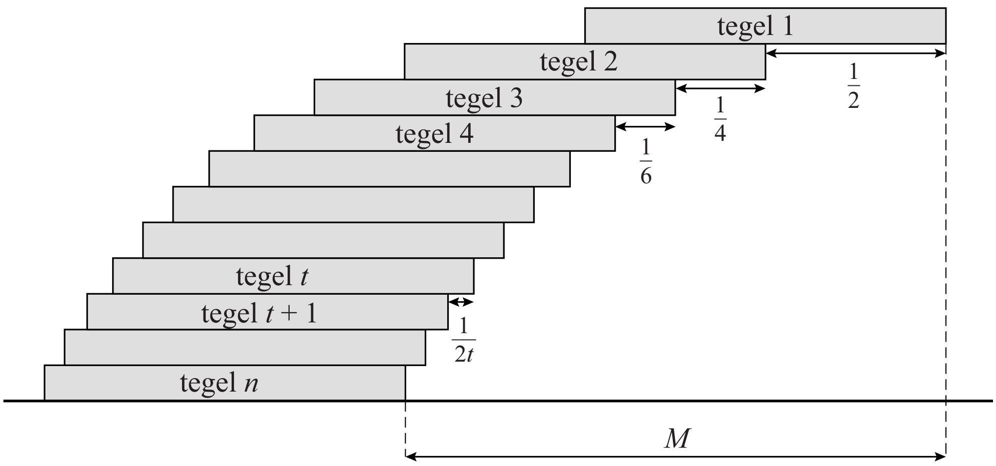
Het uitsteken van de gestapelde tegels vanaf de onderste tegel wordt de **overhang** genoemd. De overhang is maximaal als de stapel tegels nog net in evenwicht is, dus net niet omvalt.

De maximale overhang M bij een stapel van n tegels ontstaat als volgt:

– laat tegel 1 (de bovenste tegel) een halve tegellengte uitsteken ten opzichte van tegel 2 (de eronder liggende tegel);
– laat tegel 2 een kwart uitsteken ten opzichte van tegel 3;
– laat tegel 3 een zesde uitsteken ten opzichte van tegel 4;
– enzovoort.

Algemeen geldt dan: tegel t steekt $\frac{1}{2t}$-deel van een tegellengte uit ten opzichte van tegel $t+1$. Zie de figuur.

figuur



Bij een bepaald aantal tegels is de maximale overhang meer dan één tegellengte.

3p **13** Bereken vanaf welk aantal tegels dit het geval is.

In de rest van deze opgave nemen we tegels van 30 cm lang en 15 cm breed met een dikte van 3 cm. Deze tegels stapelen we weer 'netjes' op elkaar, zoals op de foto en in de figuur.

Bij deze tegels kan de maximale overhang M benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 + \frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2} \qquad (1)$$

Hierin is M de maximale overhang in cm en is n het totaal aantal tegels in de stapel, met $n \geq 2$.

Wanneer er voldoende tegels beschikbaar zijn, kan in theorie de maximale overhang zo groot worden gemaakt als gewenst.
Met de genoemde 3 cm dikke tegels wordt een overhang van 1 meter gemaakt.

4p **14** Bereken hoeveel cm hoog de stapel tegels in dit geval minstens moet worden volgens formule (1).

Voor grote waarden van n kan M benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 \qquad (2)$$

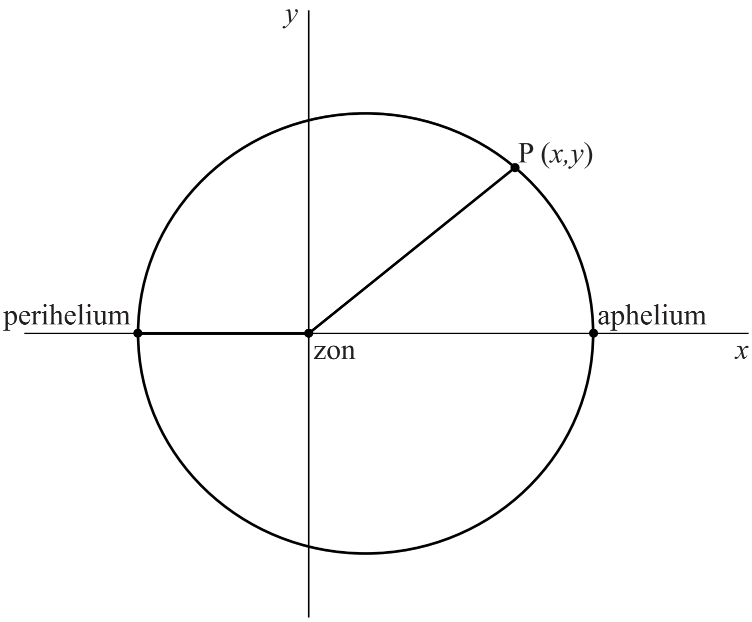
Hierin is M weer de maximale overhang in cm en is n weer het totaal aantal tegels in de stapel.

4p **15** Bereken voor welke waarde van n de benadering van M met formule (2) voor het eerst minder dan 0,1 centimeter afwijkt van de benadering met formule (1).

Pluto

De dwergplaneet Pluto beweegt om de zon. De afstand van Pluto tot de zon is niet altijd even groot.
De plaats waar Pluto zich het dichtst bij de zon bevindt wordt het **perihelium** genoemd, de plaats waar Pluto zich het verst van de zon af bevindt het **aphelium**. De baan van Pluto wordt in een assenstelsel weergegeven met de zon in de oorsprong en het perihelium en het aphelium op de x-as.
In figuur 1 is een mogelijke positie van Pluto (P) weergegeven.

figuur 1



Bij de bovenste helft van deze baan in het assenstelsel hoort (bij benadering) de volgende formule:

$$y = \sqrt{1500 - \tfrac{15}{16}(x-10)^2} \qquad (1)$$

Hierbij zijn x en y in astronomische eenheden AE (1 AE = 150 miljoen km).

Uit formule (1) volgt dat de afstand van Pluto tot de zon in het perihelium 30 AE is en in het aphelium 50 AE.

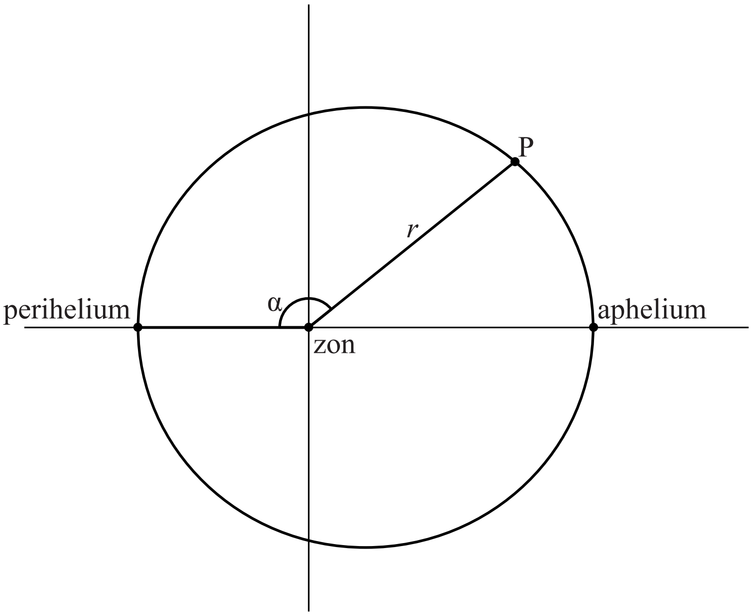
5p **16** Bewijs dit.

Een ander model voor de afstand van Pluto tot de zon luidt:

$$r = \frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)} \qquad (2)$$

Hierin is r de afstand van Pluto tot de zon in AE en is α de hoek tussen het lijnstuk zon-Pluto en het lijnstuk zon-perihelium. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **17** Beredeneer op algebraïsche wijze met behulp van formule (2) dat de minimale afstand van Pluto tot de zon gelijk is aan 30 AE en de maximale afstand 50 AE.

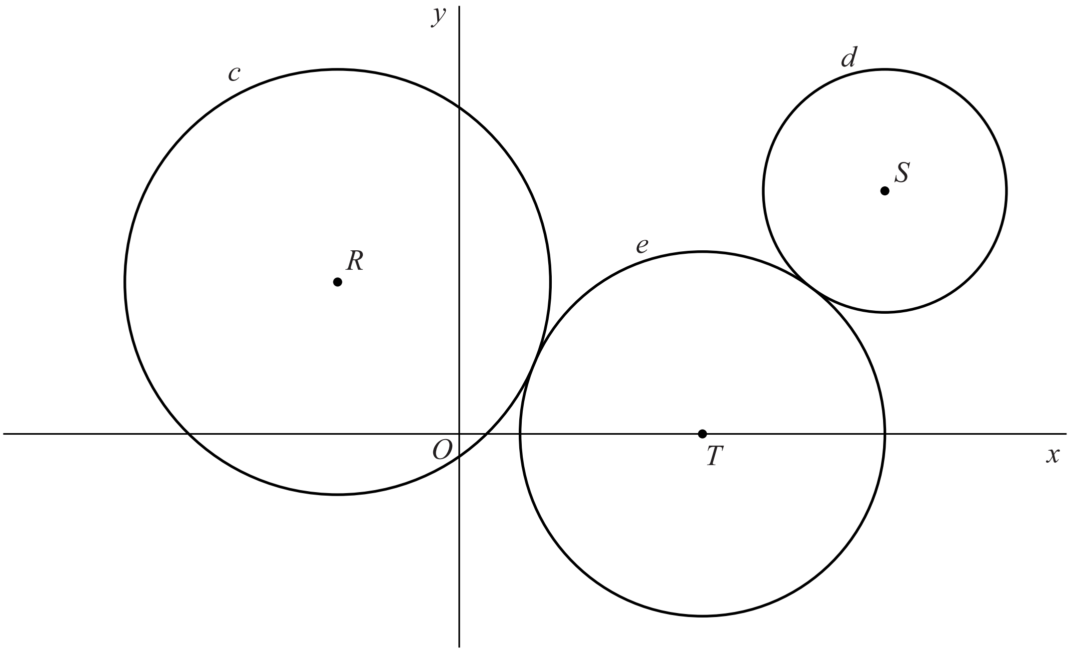
Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Rakende cirkels

De cirkel c met middelpunt R is gegeven door $(x+4)^2+(y-5)^2=49$ en de cirkel d met middelpunt S is gegeven door $(x-14)^2+(y-8)^2=16$.

Een derde cirkel e, met middelpunt T op de x-as, raakt aan beide cirkels. Verder liggen c en d buiten e. Zie de figuur.

figuur



De x-coördinaat van T noemen we p, dus $OT=p$.

Er geldt: de afstand van R tot T is gelijk aan $\sqrt{p^2+8p+41}$.

3p **18** Bewijs dit.

De lijn door R en T gaat door het raakpunt van de cirkels c en e.
Bovendien gaat de lijn door S en T door het raakpunt van de cirkels d en e.
Verder is de afstand van S tot T gelijk aan $\sqrt{p^2-28p+260}$.

5p **19** Bereken de straal van cirkel e.