Examen HAVO

2016

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

HA-1024-f-16-2-o

FORMULEBLAD

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $phi < -0{,}4$ of $phi > 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0{,}4 \le phi < -0{,}2$ of $0{,}2 < phi \le 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0{,}2 \le phi \le 0{,}2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{\text{cp}}$) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{\text{cp}} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{\text{cp}} \le 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{\text{cp}} \le 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\overline{X}_1 \ge \overline{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0{,}4 < E \le 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \le 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen[1)] elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is
$p \pm 2 \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is
$\overline{X} \pm 2 \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$, met $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

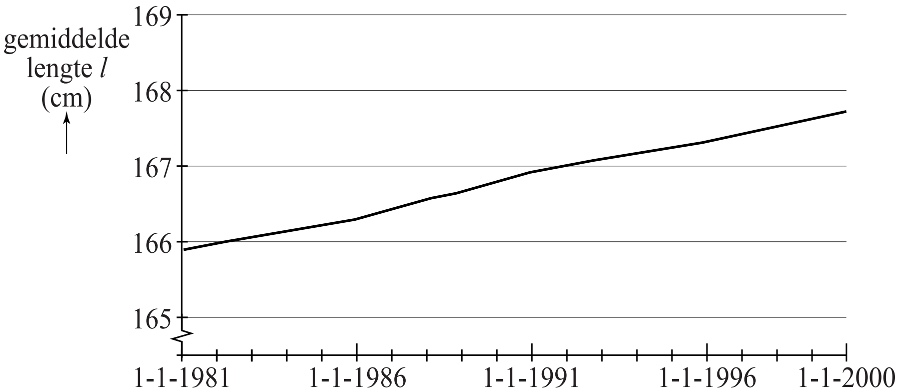
BMI, hoger dan je denkt

Jarenlang nam in Nederland de gemiddelde lengte van volwassen mannen en vrouwen toe. Ook aan het einde van de vorige eeuw was dat nog zo: op 1 januari van het jaar 1981 waren Nederlandse mannen gemiddeld 177,3 cm lang en op 1 januari 2000 was de gemiddelde lengte toegenomen tot 180,4 cm. Dit proces verliep bij benadering lineair. Wanneer we ervan uitgaan dat deze groei zich op dezelfde wijze voortzet, kan met behulp van lineair extrapoleren de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050 berekend worden.

3p **1** Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050.

Ook de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouwen nam bij benadering lineair toe van 1981 tot het jaar 2000. Zie de figuur.

figuur



Voor deze periode kan voor de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouwen een formule opgesteld worden van de vorm

$$l = a \cdot t + b$$

Hierin is l de gemiddelde lengte in cm en t de tijd in jaren waarbij geldt dat $t = 0$ op 1 januari 1981; a en b zijn getallen.

4p **2** Stel deze formule op, gebruikmakend van de gemiddelde lengte op 1 januari 1981 en de gemiddelde lengte op 1 januari 2000.

Jaarlijks wordt voor een onderzoek aan een groot aantal personen gevraagd hun lengte te schatten. We noemen deze lengte de geschatte lengte. Daarnaast wordt de lengte nauwkeurig door een onderzoeker gemeten. We noemen deze lengte de werkelijke lengte.
De geschatte lengte en de werkelijke lengte worden vervolgens met elkaar vergeleken. Het blijkt dat mensen in het algemeen hun lengte te hoog schatten.

In het onderzoek van een bepaald jaar schatten de vrouwen hun lengte gemiddeld 0,9 cm hoger dan hun werkelijke lengte. De standaardafwijking van de werkelijke lengte was 6,0 cm. De standaardafwijking van de geschatte lengte was 6,2 cm.

3p **3** Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad of het verschil tussen de werkelijke lengte en de geschatte lengte gering, middelmatig of groot is.

In het algemeen schatten mensen hun lengte dus te hoog. Tegelijkertijd geldt dat ze hun gewicht te laag schatten: ze denken minder te wegen dan ze in werkelijkheid wegen. Dit heeft gevolgen voor de BMI (Body Mass Index). Dit is een maat voor het al dan niet te zwaar zijn van een persoon. De formule voor de BMI luidt:

$$BMI = \frac{G}{L^2}$$

In deze formule is G het gewicht in kg en L de lengte in meters.
Als de BMI van iemand groter is dan 25, spreekt men van overgewicht. Uiteraard behoren mensen hun BMI te berekenen met behulp van hun werkelijke lengte en gewicht. Als mensen echter hun geschatte lengte en gewicht gebruiken, levert dat een andere BMI op.

Er is bij minder mensen sprake van overgewicht als zij hun BMI met hun eigen schattingen berekenen in plaats van met hun werkelijke lengte en gewicht.

3p **4** Beredeneer dit met behulp van de formule voor de BMI, zonder voor G en L getallen in te vullen.

Zorginfecties

Patiënten die voor een behandeling enige tijd in een ziekenhuis worden opgenomen, lopen tijdens dit verblijf het risico een infectie te krijgen. Zo'n infectie wordt een zorginfectie genoemd. Een deel van de zorginfecties ontstaat na een operatie.

In de periode 2007 tot en met 2012 is een steekproef gehouden onder een deel van de Nederlandse ziekenhuizen. Enkele resultaten hiervan zijn in de tabel te zien.

tabel

	aantal
patiënten	95 299
patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	4694
geopereerde patiënten	32 664
geopereerde patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	1286

We nemen aan dat de patiënten in deze ziekenhuizen representatief zijn voor alle patiënten die in een Nederlands ziekenhuis worden opgenomen. Dan kunnen we op basis van de gegevens in de tabel schatten hoeveel procent van alle in Nederland geopereerde patiënten in de genoemde periode een zorginfectie opliep.

4p **5** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit percentage. Rond de getallen in je eindantwoord af op één decimaal.

Het is mogelijk om op basis van de tabel een kruistabel te maken. Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met deze kruistabel. Met behulp van de ingevulde kruistabel kun je bepalen of het verschil in het krijgen van een zorginfectie tussen geopereerde en niet-geopereerde patiënten groot, middelmatig of gering is.

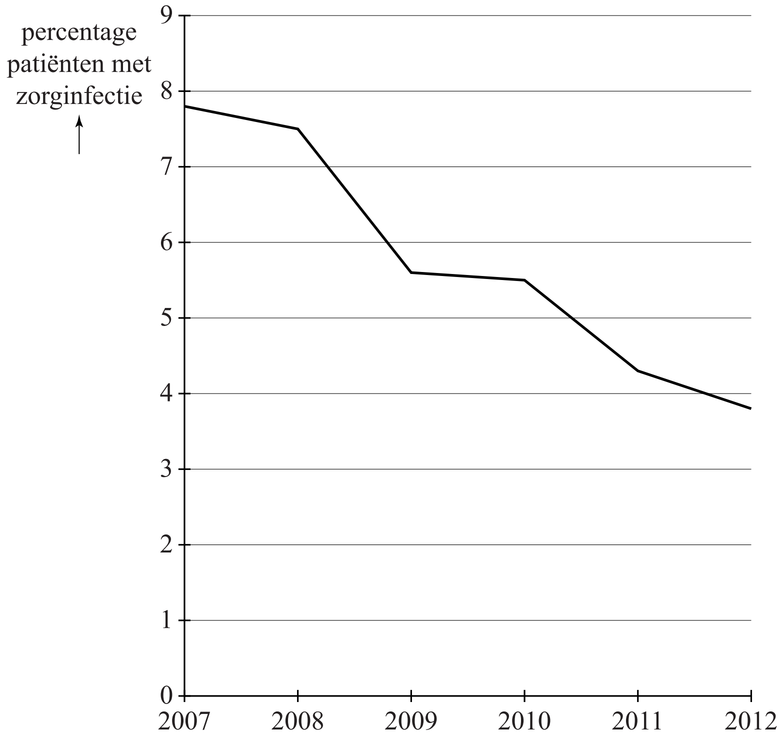
6p **6** Vul de kruistabel op de uitwerkbijlage in en bepaal daarmee, en met behulp van een vuistregel op het formuleblad, of het genoemde verschil groot, middelmatig of gering is.

In de kruistabel op de uitwerkbijlage worden variabelen gebruikt.

4p **7** Noem de variabelen uit de kruistabel en geef aan of deze variabelen kwalitatief of kwantitatief zijn. Licht je antwoord toe.

In de periode 2007 tot en met 2012 daalde in Nederland het percentage patiënten met een zorginfectie. Zie de figuur.

figuur



We gaan ervan uit dat elke patiënt die een zorginfectie oploopt, 4 extra verpleegdagen nodig heeft. In 2007 bedroeg de kostprijs van elke extra verpleegdag € 1140. Daarna steeg deze kostprijs jaarlijks met 3%.
In 2007 werden er 1,8 miljoen patiënten in een ziekenhuis opgenomen, in 2012 waren dat er 2,0 miljoen.
Zowel de kostprijs per extra verpleegdag als het totaal aantal patiënten steeg. Maar omdat het percentage patiënten met een zorginfectie daalde, waren de totale kosten van de extra verpleegdagen ten gevolge van zorginfecties in 2012 lager dan in 2007. Op basis van bovenstaande gegevens kan berekend worden hoeveel deze kosten lager waren.

5p **8** Bereken dit bedrag. Rond het antwoord af op miljoenen euro’s.

Random close packing

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs.
Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule:

$$I_{\text{knikker}} = 0,5236 \cdot d^3$$

Hierin is d de diameter van de knikker in cm en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3.

Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van 1,3 cm hebben.

3p **9** Geef, met behulp van het hierboven beschreven stappenplan en de formule voor I_{knikker}, een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

Het aantal knikkers in de gevulde pot hangt af van de inhoud van de pot en van de diameter van de knikkers. Er geldt:

$$K = 1,222 \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

Hierin is d de diameter van de knikkers in cm en I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3. De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot.

4p **10** Laat zien hoe je de formule voor K uit het stappenplan kunt afleiden.

Het vullen van een glazen pot met knikkers is een voorbeeld van random close packing. Bij random close packing wordt een hoeveelheid identieke voorwerpen willekeurig in een pot of bak gedaan, waarna er wordt geschud om de beschikbare ruimte zo goed mogelijk op te vullen. Bij bolvormige voorwerpen, zoals knikkers, blijkt dat het gedeelte dat gevuld wordt altijd ongeveer even groot is. Het percentage gevulde ruimte is normaal verdeeld met een gemiddelde van 64,0. In 95% van de gevallen ligt het percentage gevulde ruimte tussen de 63,6 en 64,4.

Op grond van dit gegeven kun je de standaardafwijking van het percentage gevulde ruimte berekenen.

3p **11** Bereken deze standaardafwijking.

Als je precies weet welk percentage van een pot gevuld is, kun je de volgende formule gebruiken om het aantal knikkers te berekenen:

$$K = 0{,}0191 \cdot p \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

Hierin is p het percentage gevulde ruimte, I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 en d de diameter van de knikkers in cm.

Een glazen pot met een inhoud van 1050 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers met een diameter van 0,95 cm. Het aantal knikkers in de pot is afhankelijk van het percentage gevulde ruimte.

3p **12** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het aantal knikkers in de pot. Rond af op helen.

Janneke wil op een braderie schatten hoeveel knikkers er in een glazen pot zitten. Ze herkent de glazen pot als een voorraadpot met een inhoud van 1000 cm^3 en schat dat de diameter van de knikkers minimaal 1,5 cm en maximaal 1,7 cm is. Verder gaat ze ervan uit dat het percentage gevulde ruimte minimaal 63,0 en maximaal 65,0 is.

3p **13** Bereken het maximale aantal knikkers dat volgens de schattingen van Janneke in de glazen pot kan zitten. Licht je antwoord toe.

Asbest

Vroeger werd in veel bouwmaterialen asbest gebruikt. Als een oud gebouw gesloopt wordt, kunnen asbestvezels in de lucht terechtkomen. Iemand die langdurig asbestvezels inademt, kan erg ziek worden.
Als men vermoedt dat er bij de sloop asbest is vrijgekomen, dan worden er maatregelen genomen op basis van de gemeten hoeveelheid asbestvezels in de lucht.

Er zijn twee hoofdsoorten asbest: wit asbest en blauw asbest. Met behulp van de gemeten concentraties van deze beide hoofdsoorten wordt de overschrijdingsfactor F berekend. Er geldt:

$$F = \frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300}$$

Hierin zijn C_{wit} en C_{blauw} de gemeten concentraties witte en blauwe asbestvezels per m^3 lucht. Hoe groter de waarde van de overschrijdingsfactor F is, des te groter is het gevaar.

Een van de twee hoofdsoorten asbest is gevaarlijker dan de andere hoofdsoort.

3p **14** Beredeneer aan de hand van de formule, zonder getallenvoorbeelden te geven, welke hoofdsoort gevaarlijker is: wit of blauw asbest.

Afhankelijk van de waarde van F worden maatregelen getroffen. Men onderscheidt drie situaties:

- $F < 0,3$: zeer klein risico, er wordt een beheersplan opgesteld,
- $0,3 \leq F \leq 1$: klein risico, de asbestbron wordt opgespoord en verwijderd,
- $F > 1$: groot risico, er wordt tot ontruiming overgegaan.

Tijdens de verbouwing van een bepaald huis wordt gemeten: $C_{\text{blauw}} = 75$.

4p **15** Bereken bij welke waarden van C_{wit} wordt geadviseerd om tot ontruiming over te gaan.

In het geval dat $F = 1$ is de formule te schrijven in de vorm:

$$\ldots \cdot C_{\text{wit}} + \ldots \cdot C_{\text{blauw}} = 6000$$

4p **16** Bereken de getallen die op de puntjes moeten staan.

Op de uitwerkbijlage is een assenstelsel getekend met horizontaal C_{wit} en verticaal C_{blauw}. De drie risico's (zeer klein, klein en groot) kunnen als gebieden worden weergegeven in dit assenstelsel. De grenzen tussen deze gebieden zijn (rechte) lijnen.

5p **17** Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage de drie risicogebieden. Kies hiertoe een geschikte schaalverdeling en geef duidelijk aan welk risico bij welk gebied hoort.

Met een thermosfles heb je onderweg altijd je eigen warme drank bij je. Een consumentenblad heeft een aantal thermosflessen getest. Eén van de testonderdelen was: hoe snel neemt de temperatuur van de flesinhoud af? De flessen werden gevuld met zeer heet water en in een laboratorium in een testomgeving gezet, bij een temperatuur van 0°C. Vervolgens werd elk uur de temperatuur van het water gemeten.
In de figuur staan de resultaten van twee thermosflessen: de thermosfles Robuust en de thermosfles Thermax.

figuur

ROBUUST

Temperatuur neemt sterk af.
Hoog eigen gewicht. Afsluitstop met snelsluiting, sluit niet automatisch bij vastdraaien beker. Voorzien van inklapbaar handvat en draagband.
Na 6 uur 72,5°C
Na 8 uur 65,4°C
Na 12 uur 52,2°C
Afmetingen (mm) Ø100 x 279
Inhoud 925 cc
Prijs € 14,95

THERMAX
LIGHT & COMPACT

Na 16 uur nog goed warm. Afsluitdop met snelsluiting, sluit automatisch bij vastdraaien beker. 15 jaar garantie, behalve op afdichtstop en beker.
Na 6 uur 85,8°C
Na 8 uur 82,8°C
Na 12 uur 77,1°C
Afmetingen (mm) Ø80 x 311
Inhoud 915 cc
Prijs € 44,95

TEST
WINNAAR

De temperatuur van het water in de Robuust nam in het eerste uur met 4,2°C af. In de daaropvolgende uren nam de temperatuur telkens met 0,1°C minder af vergeleken met het uur ervoor. Met behulp van deze gegevens en de informatie in de figuur kun je berekenen hoe hoog de begintemperatuur van het water was.

3p **18** Bereken deze begintemperatuur.

De Thermax was de testwinnaar. Na 6 uur nam de temperatuur van het water in deze thermosfles af volgens een exponentieel verband. Met behulp van de gegevens in de figuur kan berekend worden dat de temperatuur ieder uur met afgerond 1,8% daalde.

4p **19** Bereken dit percentage in twee decimalen nauwkeurig.

Veel mensen vinden koffie of thee alleen lekker als de temperatuur ten minste 65°C is. Bij de Thermax bleef tijdens de test de temperatuur van het water heel lang boven die grens van 65°C.

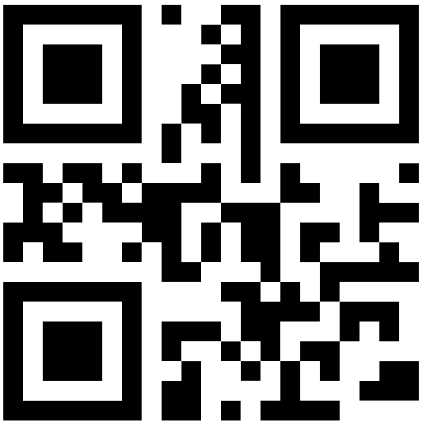
5p **20** Bereken hoeveel hele uren de temperatuur ten minste 65°C was.

Ga verder op de volgende pagina.

QR-code

Tegenwoordig zie je vaak Quick Responsecodes, ofwel QR-codes. Door zo'n QR-code met je mobiele telefoon te 'lezen' krijg je informatie over een bepaald product of word je doorgeschakeld naar een website.
Een QR-code is een vierkante figuur die is opgebouwd uit kleine zwarte en witte hokjes, zie figuur 1a.

figuur 1a: QR-code

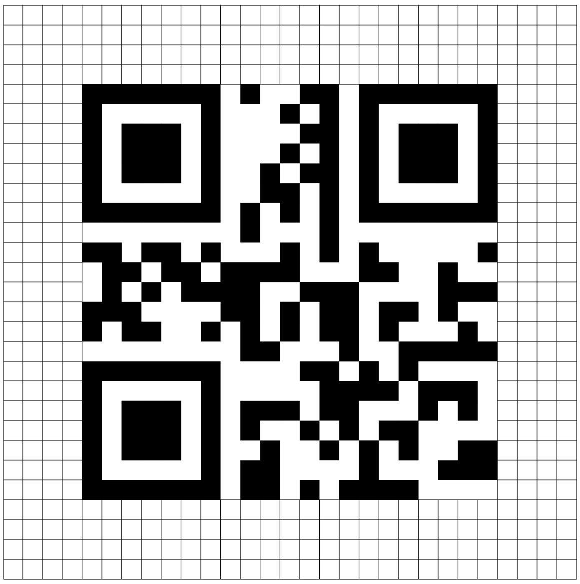


In drie hoeken van een QR-code zijn er hokjes volgens een vast patroon ingekleurd. De overgebleven hokjes van een QR-code zijn zwart of wit gekleurd afhankelijk van de informatie die de QR-code moet bevatten.

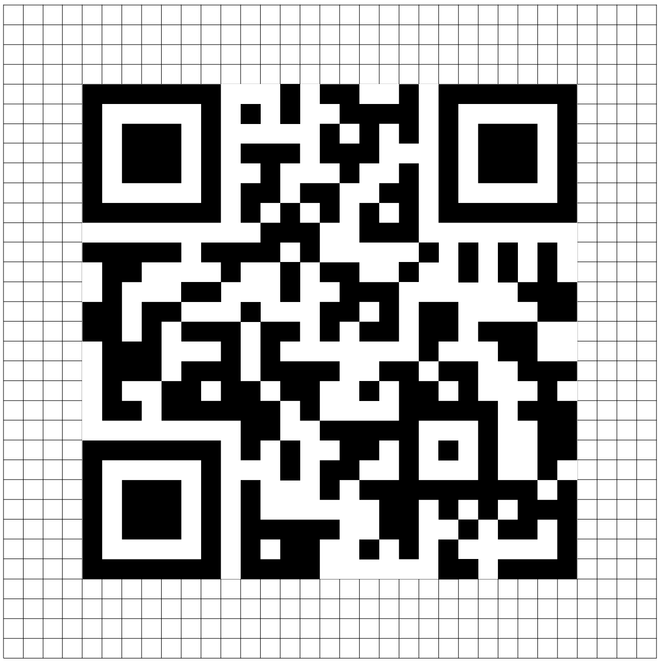
De QR-code in figuur 1a bestaat uit 441 hokjes, ofwel uit 21 bij 21 hokjes. QR-codes van dit formaat zijn de kleinste die bestaan en krijgen daarom versienummer 1. Er zijn ook QR-codes met een hoger versienummer. De grootste QR-codes bestaan uit 177 bij 177 hokjes en het bijbehorende versienummer is dan 40. Het verband tussen het aantal hokjes op de onderste regel van een QR-code en het versienummer is lineair.

De totale ruimte die nodig is om een QR-code weer te geven, wordt niet alleen bepaald door het versienummer. Het wordt aangeraden om rondom elke QR-code voldoende witruimte te hebben. We gaan ervan uit dat rondom elke QR-code een witte rand gebruikt wordt van 4 hokjes breed, ongeacht het versienummer. In figuur 1b zie je hoe dat eruitziet bij een QR-code met versienummer 1 en in figuur 2 bij een QR-code met versienummer 2. Voor de duidelijkheid zijn de hokjes van de witte rand getekend.

figuur 1b: Totale benodigde ruimte bij een QR-code met versienummer 1



figuur 2: Totale benodigde ruimte bij een QR-code met versienummer 2



Een deel van de totale benodigde ruimte wordt dus in beslag genomen door de witte rand. Bij een QR-code met versienummer 1, zoals in figuur 1b, is dat deel ongeveer gelijk aan 48%. Bij een QR-code met versienummer 2, zoals in figuur 2, is dat deel ongeveer 43%. Hoe groter het versienummer, des te kleiner is het percentage.

7p **21** Bereken hoe groot dat percentage is bij een QR-code met versienummer 25.