

Examen HAVO

2016

tijdvak 1
maandag 23 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.

Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq phi < -0,2$ of $0,2 < phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met \bar{X}_1 en \bar{X}_2 de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹⁾ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

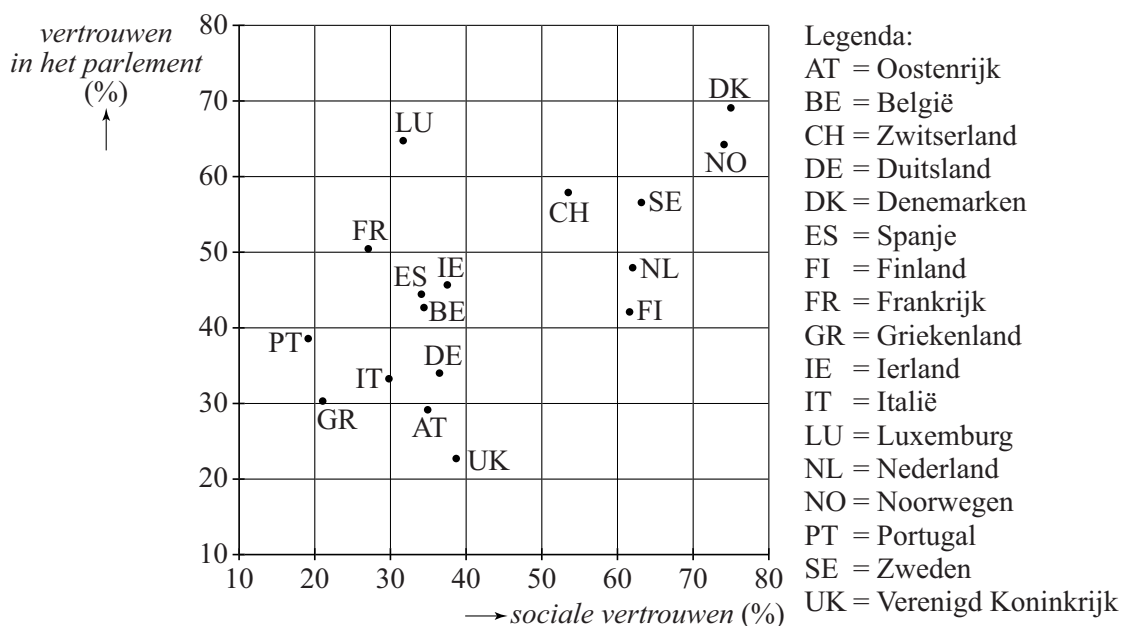
$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met \bar{X} het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en

S de steekproefstandaardafwijking.

Vertrouwen

Het Sociaal en Cultureel Planbureau beschrijft om de twee jaar in het rapport 'De Sociale Staat van Nederland' hoe het met het vertrouwen van Nederlanders gesteld is. Daarbij wordt onder andere onderscheid gemaakt tussen het vertrouwen in de medemens, ook wel het **sociale vertrouwen** genoemd, en het vertrouwen in het parlement. Beide soorten van vertrouwen worden uitgedrukt in een percentage: hoe hoger het percentage, des te meer vertrouwen. In de figuur wordt het vertrouwen van Nederlanders in het jaar 2008 vergeleken met dat van andere Europeanen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in Italië het sociale vertrouwen 30% bedroeg.

figuur



In de figuur is af te lezen hoe groot in Nederland het vertrouwen in het parlement was. In sommige van de overige landen was het vertrouwen in het parlement groter.

- 3p 1 Bepaal in hoeveel procent van de overige landen dit het geval was.
- 3p 2 Schrijf de namen op van alle landen waar het sociale vertrouwen groter was dan het vertrouwen in het parlement.

Voor het onderzoek 'Sociale samenhang' in 2013 werden gegevens verzameld onder de Nederlandse bevolking. Er deden 7400 aselect getrokken personen aan dit onderzoek mee. Van de deelnemers gaven 4292 personen aan vertrouwen te hebben in de medemens.

Op basis van deze gegevens worden de volgende twee uitspraken gedaan over het percentage Nederlanders dat (in 2013) vertrouwen had in de medemens:

- 1 Het is meer dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56,6 ; 59,4]$ ligt.
- 2 Het is minder dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56,6 ; 59,4]$ ligt.

Eén van deze twee uitspraken is juist.

4p **3** Welke uitspraak is juist? Licht je antwoord met een berekening toe.

Duiken

Duiken is een mooie sport, maar niet ongevaarlijk. Het grootste gevaar waar duikers mee te maken krijgen, is de druk van het water op het lichaam. Deze druk wordt hoger naarmate de duiker dieper duikt. Een formule die het verband tussen de druk en de diepte weergeeft, luidt:

$$p = 1 + \frac{d}{10}$$

Hierin is p de druk van het water op het lichaam in bar en d de diepte onder water in meter.



Duikorganisaties adviseren recreatieve duikers om de druk van het water op het lichaam niet hoger te laten worden dan 5 bar.

3p 4 Bereken hoe diep een recreatieve duiker dan maximaal kan duiken.

Bij een duik wordt een duikfles meegenomen met perslucht om onder water te kunnen ademen. Perslucht is lucht die onder grote druk wordt samengeperst. De hoeveelheid perslucht L wordt uitgedrukt in barliter. De waarde van L wordt berekend door de inhoud van de fles (in liter) te vermenigvuldigen met de druk (in bar). Als je bijvoorbeeld een duikfles van 15 liter vult tot een druk van 200 bar, dan is de hoeveelheid perslucht in de fles $15 \times 200 = 3000$ barliter.

Om de benodigde hoeveelheid perslucht voor een duik te berekenen, maakt een duiker gebruik van de volgende formule:

$$L = 20 \cdot p \cdot T$$

Hierin is L de hoeveelheid perslucht in barliter, p de druk van het water op het lichaam in bar en T de duiktijd in minuten. De duiktijd is de tijd die de duiker onder water is.

Jan wil een duik gaan maken van drie kwartier naar een diepte van 19 meter. Hij gebruikt een duikfles van 12 liter en vult deze tot een druk van 200 bar.

4p 5 Bereken of Jan hiermee deze duik kan maken.

Het Grevelingenmeer in de provincie Zeeland is een groot meer, dat niet overall even diep is. Dennis gaat duiken in een gedeelte van dit meer, waar het nergens dieper dan 25 meter is. Hij vult zijn duikfles met 2400 barliter perslucht.

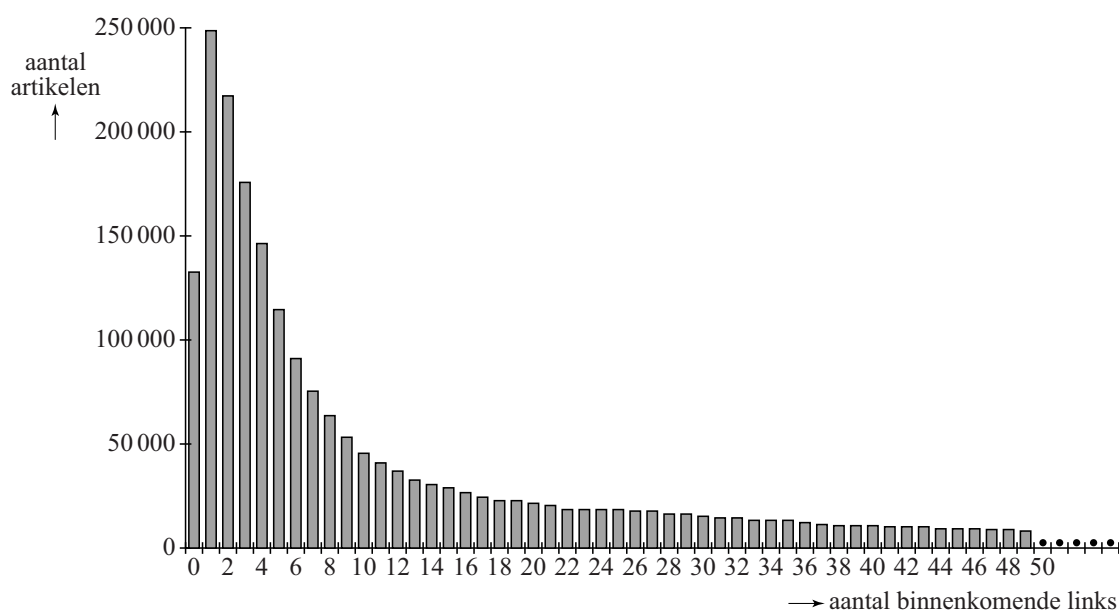
Met deze hoeveelheid perslucht heeft Dennis verschillende mogelijkheden voor zijn duik. Hij kan bijvoorbeeld kiezen voor een niet al te diepe duik waarbij hij lang onder water kan blijven, of voor een diepere duik met een kortere duiktijd. Dennis kan voor de keuze van zijn duik een grafiek tekenen, waarbij hij de duiktijd T uitzet tegen de diepte d .

- 5p **6** Teken deze grafiek in de figuur op de uitwerkbijlage voor duiken van minstens 5 meter en hoogstens 25 meter diep. Bereken hiervoor eerst voor minstens vijf dieptes d de bijbehorende duiktijd T .

Links naar Wikipedia-artikelen

Wikipedia is een encyclopedie op internet, waarin veel artikelen over diverse onderwerpen te vinden zijn. In die artikelen wordt vaak met een link verwezen naar andere artikelen. Van elk artikel dat op 24 januari 2009 in het Engelse Wikipedia voorkwam, is onderzocht hoeveel links in andere artikelen naar het betreffende artikel verwezen. Deze links worden de **binnenkomende links** genoemd. Het aantal binnenkomende links per artikel is geteld. De resultaten van dit onderzoek staan in figuur 1 en tabel 1.

figuur 1 **aantal binnenkomende links per artikel**



tabel 1

aantal binnenkomende links	aantal artikelen
0	133 515
1 of 2	465 915
3 t/m 10	763 683
11 of meer	1 212 195
totaal	2 575 308

In het onderzoek valt onder andere het volgende te lezen:
“43% van de artikelen met 11 of meer binnenkomende links heeft zelfs 50 of meer binnenkomende links. Dat zijn de echt belangrijke artikelen, waarnaar vaak verwezen wordt.”

De lange staart van artikelen waarnaar 50 of meer keer verwezen wordt, is niet aangegeven in figuur 1. Deze staart hoort er uiteraard wel bij.

- 3p 7 Bereken hoeveel procent van alle artikelen uit het onderzoek 50 of meer binnenkomende links hadden.

- De drie centrummaten van het aantal binnenkomende links, namelijk het gemiddelde, de modus en de mediaan, zijn alle drie verschillend.
- 4p 8 Zet de centrummaten op volgorde van klein naar groot. Licht je antwoord toe.

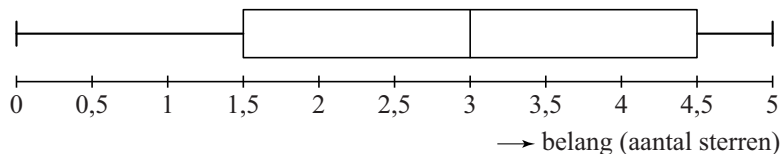
De onderzoekers kwalificeren het belang van elk artikel door het te voorzien van een aantal hele en/of halve sterren. Artikelen die geen binnenkomende links hebben, zijn volgens hen niet of nauwelijks van belang en krijgen daarom 0 sterren. De belangrijkste artikelen krijgen 5 sterren. In tabel 2 kun je aflezen welk aantal sterren bij welk aantal binnenkomende links hoort.

tabel 2

aantal binnenkomende links	belang (aantal sterren)
0	☆☆☆☆☆
1	★☆☆☆☆
2	★★☆☆☆
3 of 4	★★★☆☆
5 of 6	★★★★☆
7 of 8	★★★★★
9 of 10	★★★★★
11 t/m 19	★★★★★
20 t/m 29	★★★★★
30 t/m 49	★★★★★
50 of meer	★★★★★

In figuur 2 is de boxplot getekend die hoort bij het belang, uitgedrukt in het aantal sterren.

figuur 2



- 4p 9 Laat met een berekening zien dat het eerste kwartiel in de boxplot juist is aangegeven.

Bepaalde informatie over het aantal binnenkomende links kan gemakkelijk uit de boxplot in combinatie met tabel 2 afgelezen worden. Voor andere informatie is het oorspronkelijke staafdiagram juist gemakkelijker.

- 3p 10 Geef één voorbeeld van informatie over het aantal binnenkomende links die gemakkelijker uit de boxplot (in combinatie met tabel 2) gehaald kan worden. Geef ook twee voorbeelden van informatie die alleen uit het staafdiagram af te lezen is.

Start to Run

Als je begint met hardlopen, moet je in het begin niet te snel of te lang willen lopen. Het is veel beter om rustig aan te beginnen en eerst een goede conditie op te bouwen. Een trainingsprogramma dat veel gebruikt wordt, heet Start to Run. Daarbij moet je tien weken lang drie keer per week hardlopen, waarbij je gaandeweg steeds langere periodes aan één stuk hardloopt. In de figuur zie je hoe het trainingsprogramma eruitziet.

figuur

Week-nummer	Trainings-dag	Programma	Totaal aantal minuten
1	1	+0+0++00++00+++000	18
	2	+0+0++00+++000+++000	20
	3	+0++00++00+++000+++000	22
2	1	+0++00++00+++000+++000	22
	2	++00+++000+++000+++000	22
	3	+0++00+++000+++000+++000	24
3 en 4	1	+0++00+++000+++000+++000	24
	2	++00++0++0++0++0++0++0++0	25
	3	+0++00+++000+++000+++++0	26
5 en 6	1	++00+++00+++++000+++++000+++++00	32
	2	++0+++00+++++00+++++00+++++00	33
	3	++00+++++00+++++00+++++00+++++00	34
7	1	+++++0+++++00+++++00+++++0	32
	2	+++++0+++++00+++++0+++++0	37
	3	+++++0+++++00+++++0+++++0	37
8 en 9	1	+++++0+++++00+++++0+++++00	34
	2	+++++0+++++0+++++0+++++0	37
	3	+++++0+++++0+++++0+++++0	32
10	1	30 minuten hardlopen met 1 of 2 minuten wandelen naar keuze	31 of 32
	2	32 minuten hardlopen met 1 of 2 minuten wandelen naar keuze	33 of 34
	3	30 minuten hardlopen zonder wandelen	30

+ betekent: 1 minuut hardlopen

0 betekent: 1 minuut wandelen

In het schema kun je aflezen dat je op trainingsdag 1 van week 1 eerst tweemaal om en om één minuut moet hardlopen en één minuut moet wandelen, daarna tweemaal twee minuten moet hardlopen en twee minuten moet wandelen en ten slotte drie minuten moet hardlopen en drie minuten moet wandelen. Daarmee ben je 18 minuten bezig.

Het programma is zo opgesteld dat je na tien weken een halfuur zonder onderbreking kunt hardlopen. Het gaat bij Start to Run niet om de snelheid waarmee je hardloopt, dat komt later. Er wordt juist geadviseerd om gedurende deze tien weken de hardloopsnelheid constant te houden.

Mevrouw Harmsen traint volgens het programma en is inmiddels in week 9. Haar hardloopsnelheid is steeds 140 meter per minuut en haar wandelsnelheid is steeds 50 meter per minuut.

- 4p 11 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van de afgelegde afstand van mevrouw Harmsen tijdens trainingsdag 1 van week 9.

Meneer Saddal volgt het programma van Start to Run ook. Zijn hardloopsnelheid is gedurende het hele programma 9 km per uur. Dit is tweeënhalf keer zo hoog als zijn wandelsnelheid. Je kunt een formule opstellen voor de totale afstand die meneer Saddal per trainingsdag aflegt. Deze formule luidt:

$$A = 0,15 \cdot H + 0,06 \cdot W$$

Hierin is A de totale afgelegde afstand in km, H het aantal hardloopminuten en W het aantal wandelminuten.

- 3p 12 Laat met berekeningen zien dat deze formule juist is.

Meneer Saddal legt op de laatste trainingsdag van week 10, als hij een halfuur lang zonder onderbreking kan hardlopen, een veel grotere afstand af dan op de eerste trainingsdag van week 1.

- 3p 13 Bereken hoeveel meter het verschil is.

Meneer Saddal krijgt de smaak te pakken en gaat na de periode van 10 weken door met hardlopen. Hij besluit om een uur lang te gaan trainen. Tijdens het hardlopen houdt hij zijn gebruikelijke snelheid aan. Lukt dat niet, dan houdt hij één of meer minuten wandelpauze. Voor een training van een uur geldt dan:

$$W = 60 - H$$

Hierin is W het aantal wandelminuten en H het aantal hardloopminuten. Als je de formule van W invult in de formule van A , ontstaat een formule van A die alleen nog afhangt van het aantal hardloopminuten H . Deze nieuwe formule van A is te herleiden tot de vorm $A = a \cdot H + b$, waarbij a en b getallen zijn.

- 3p 14 Herleid de formule van A tot deze vorm.

Opslag van radioactief afval

Een Gammacell is een apparaat dat onder andere gebruikt wordt bij onderzoek naar de bederfelijkheid van voedsel. De Gammacell is een stalen kast waarin zich de radioactieve stof cesium bevindt. Zie de foto.

De hoeveelheid radioactieve straling van cesium neemt jaarlijks met een vast percentage af en is na ongeveer 30 jaar gehalveerd.

foto



- 4p **15** Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve straling per jaar afneemt.

De tijd waarin de hoeveelheid straling tot de helft is afgenomen, wordt de halveringstijd genoemd. Soms wordt de volgende vuistregel gebruikt: 'Na tien keer de halveringstijd is het radioactieve materiaal zijn straling kwijt.'

Volgens deze vuistregel zou cesium dus na 300 jaar zijn straling kwijt zijn. Dat is niet helemaal juist. Er is nog een klein beetje van de beginstraling over.

- 3p **16** Bereken hoeveel procent van de beginstraling er na 300 jaar nog over is.

De stalen wand van de kast, waarin zich de stof cesium bevindt, houdt veel van de radioactieve straling tegen. Het deel van de straling dat tegengehouden wordt door de stalen wand, geven we aan met D . Hiervoor geldt de formule:

$$D = 1 - \frac{1}{2,058^{0,1d}}$$

Hierin is d de dikte van de stalen wand in cm.

Je kunt de formule van D schrijven in de vorm $D = 1 - g^d$, waarbij g een getal is.

- 3p **17** Bereken g en rond je antwoord af op 2 decimalen.

Afgedankte Gammacellen worden verwerkt en opgeslagen door het bedrijf Covra in Borssele. Het bedrijf moet ervoor zorgen dat uit zo'n Gammacell heel weinig straling vrijkomt wanneer deze wordt opgeslagen.

Een Gammacell met een stalen wand van 35 cm dik werkt niet goed meer en wordt afgedankt. Je kunt berekenen dat de stalen wand van deze Gammacell 8% van de straling doorlaat die het cesium heeft op het moment dat het bij Covra binnenkomt. Omdat dat percentage voor opslag te veel is, wordt de hele Gammacell ingepakt in beton. Van de straling die door het staal heen komt, wordt een percentage P door het beton doorgelaten. Dit percentage hangt af van de dikte van het beton. Er geldt de formule:

$$P = \frac{100}{1,021^d}$$

Hierin is d de dikte van het beton in cm.






Het bedrijf moet de dikte van het beton zo kiezen, dat het staal en het beton samen 5% van de straling doorlaten die het cesium op het moment van binnenkomst heeft.

- 5p **18** Bereken hoeveel cm de dikte van het beton moet zijn. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Door de Westerscheldetunnel

De Westerscheldetunnel verbindt Zeeuws-Vlaanderen met de rest van Nederland. Voor ieder voertuig, waarmee gebruikgemaakt wordt van de tunnel, moet tol betaald worden. In deze opgave gaan we uit van de tarieven die in 2013 golden per passage (enkele reis). Zie figuur 1.

figuur 1

Tarieven per enkele passage inclusief 21% BTW geldig voor 2013				
Categorie		Standaard	t-tag	Veelgebruikerstarief
①	 personenauto's zonder aanhanger	€ 5,00	€ 3,80	€ 3,05
②	 personenauto's met aanhanger	€ 7,45	€ 5,70	€ 4,55
③	 kleine (bestel)bussen, kleine vrachtwagens	€ 18,20	€ 13,90	€ 11,15
④	 grote vrachtwagens	€ 25,00	€ 19,00	€ 15,25
⑤	 motoren	€ 2,50	€ 2,50	€ 2,00

Voor elke categorie bestaan er drie verschillende tarieven:

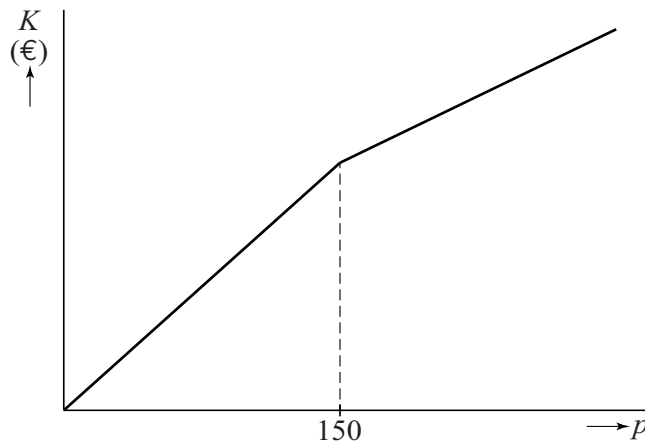
- Wie maar af en toe gebruikmaakt van de tunnel, betaalt het standaardtarief.
- Vaste klanten zijn goedkoper uit: zij bestellen eenmalig gratis de zogenaamde t-tag, een elektronisch apparaat waarmee automatisch wordt betaald. Vervolgens betalen zij bij elke passage het t-tagtarief.
- Daarnaast krijgen vaste klanten met t-tag nog meer korting indien zij vaak gebruik maken van de tunnel: voor elke passage na de 150^e passage in een kalenderjaar betalen zij het nog lagere veelgebruikerstarief.

Meneer Dingemanse woont in Middelburg en werkt 200 dagen per kalenderjaar in Terneuzen. Op deze dagen maakt hij heen en terug gebruik van de Westerscheldetunnel. Hij rijdt in een personenauto zonder aanhanger. Met de t-tag is hij veel goedkoper uit dan wanneer hij telkens het standaardtarief zou betalen.

4p 19 Bereken hoeveel euro hij per kalenderjaar goedkoper uit is met een t-tag.

Voor de bestuurder van een personenauto zonder aanhanger die gebruikmaakt van de t-tag, hangen de totale kosten K in een kalenderjaar af van het aantal passages p in dat jaar. De grafiek van K bestaat uit twee gedeelten, waarbij het tweede gedeelte minder steil loopt. In figuur 2 is een schets gemaakt van deze grafiek.

figuur 2



- 5p **20** Stel voor beide gedeelten een formule op voor K , uitgedrukt in p .

Bij het veelgebruikerstarief voor kleine (bestel)bussen hoort vanaf de 150^e passage de formule:

$$K = 11,15 \cdot p + 412,5$$

Hierin zijn K de kosten in euro's en is p het aantal passages in een kalenderjaar.

De formule geeft de kosten K inclusief 21% btw. In sommige situaties werkt men liever met een formule voor de kosten zonder btw. Deze formule kan worden herleid uit de formule van K en heeft de vorm:

$$K_{\text{zonder btw}} = a \cdot p + b$$

Hierin zijn a en b getallen en is p het aantal passages in een kalenderjaar.

- 3p **21** Bereken a en b . Rond je antwoorden af op twee decimalen.

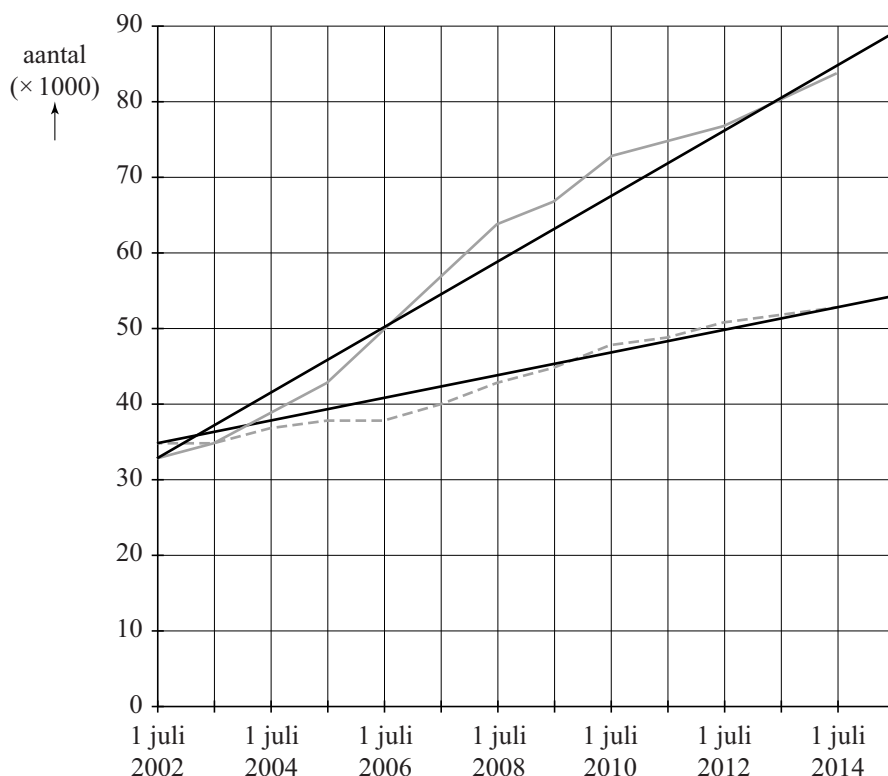
Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Vrouwenvoetbal

Vrouwenvoetbal is in. Steeds meer vrouwen en meisjes in Nederland zijn lid van een voetbalclub. In de figuur zie je de ontwikkeling van het aantal vrouwelijke leden van voetbalclubs in de periode 2002 tot en met 2014, telkens gemeten op 1 juli van het betreffende jaar. In de figuur is onder andere te zien dat zowel bij de jeugd als bij de senioren het aantal leden toeneemt.

Omdat het aantal leden bij de jeugd sneller groeit dan bij de senioren, wordt het percentage senioren bij de voetbalsters steeds lager. In 2002 was nog iets meer dan 50% van de voetbalsters senior, in 2014 was dat percentage geslonken tot minder dan 40%.

figuur



Legenda:

— jeugd (junioren en pupillen)

- - - senioren

De ontwikkeling van zowel het aantal leden bij de jeugd als bij de senioren is te benaderen door een lineair verband. De bijbehorende lijnen zijn in de figuur weergegeven. We gaan ervan uit dat de aantallen leden van de beide groepen zich volgens de getekende lijnen zullen blijven ontwikkelen. Het percentage senioren zal dan nog verder afnemen.

In een bepaald jaar zal op 1 juli het percentage senioren voor het eerst lager zijn dan 35% van het totaal aantal leden.

8p 22 Onderzoek in welk jaar dat is.